ÜBUNG L 1

Einem Haushalt steht ein Budget von 1280 € zur Verfügung. Der Haushalt konsumiert die Gütermengen x_1 bzw. x_2 der Güter 1 bzw. 2. Der Preis für eine Mengeneinheit des Gutes 1 beträgt 16 €; eine Mengeneinheit des Gutes 2 kostet 32 €. Der Nutzen, den der Haushalt aus dem Konsum zieht, wird durch die Funktion $N = x_1 \cdot x_2$ beschrieben. Bestimmen Sie die Mengen x_1, x_2, deren Konsum die angegebene Nutzenfunktion maximiert, wenn das Budget vollständig ausgegeben wird. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

a) Formulieren Sie das Optimierungsproblem.

b) Stellen Sie die zugehörige Lagrangefunktion auf.

c) Bestimmen Sie sämtliche kritischen Punkte.

ÜBUNG L 2

Das Budget eines Haushaltes beträgt a € mit $a > 0$ .Von dem Haushalt werden die Gütermengen x_1 bzw. x_2 der Güter 1 bzw. 2 konsumiert. Eine Mengeneinheit des Gutes 1 kostet 9 €; eine Mengeneinheit des Gutes 2 kostet 16 €. Der Konsumnutzen des Haushaltes wird durch die Funktion $N(x_1, x_2) = x_1^2 \cdot x_2$ annährend beschrieben. Bestimmen Sie die Mengen x_1, x_2, deren Konsum die angegebene Nutzenfunktion maximiert, wenn das Budget vollständig ausgegeben wird. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

a) Formulieren Sie das Optimierungsproblem.

b) Stellen Sie die zugehörige Lagrangefunktion auf. Verzichten Sie dabei auf die Nichtnegativitätsbedingung.

c) Bestimmen Sie sämtliche kritischen Punkte.

ÜBUNG L 3

Sie haben sich um einen Platz in einer Dreier-WG beworben. Die beiden anderen Mitbewohner sind ein Student der Mathematik und ein Student der Wirtschaftsinformatik. Als Aufnahmeprüfung stellen Ihnen die beiden folgende Aufgabe:

Das Budget für die nächste Studentendorfparty beträgt 2250 €. Hiervon sollen Cracker (Gut mit der Variablen x_1) und Bier (Gut mit der Variablen x_2) eingekauft werden. Eine Karton Cracker kostet 6 €; eine Kiste Bier kostet 10 €. Der Konsumnutzen für die Party wird laut der beiden Studenten durch der Funktion $N(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1x_2^2$ annährend beschrieben.
Bestimmen Sie die Mengen x_1, x_2, deren Konsum die angegebene Nutzenfunktion maximiert, wenn das Budget vollständig ausgegeben wird. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

$a)$ Formulieren Sie das nicht-lineare Optimierungsproblem.

$b)$ Stellen Sie die zugehörige Lagrangefunktion auf. Verzichten Sie dabei auf die Nichtnegativitätsbedingung.

$c)$ Bestimmen Sie **alle** kritischen Punkte und geben Sie jeweils den Lagrange-Multiplikator an.

ÜBUNG L 4

Das Budget eines Haushaltes beträgt 2.200 €. Von dem Haushalt werden die Mengen x_1 bzw. x_2 der Güter 1 bzw. 2 konsumiert. Eine Mengeneinheit des Gutes 1 kostet 2 €; eine Mengeneinheit des Gutes 2 kostet 3 €. Zudem sind die beiden Güter voneinander abhängig, sodass sie nur in einem festen Mengenverhältnis von $\frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{3}$ konsumiert werden können. Der Konsumnutzen des Haushaltes wird durch die Funktion

$$N(x_1, x_2) = 2.500 - \frac{1}{75} \cdot x_1 \cdot x_2$$

annährend beschrieben. Bestimmen Sie die Mengen x_1, x_2, deren Konsum die angegebene Nutzenfunktion maximiert, wenn das Budget vollständig ausgegeben und das Mengenverhältnis berücksichtigt wird. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

a) Überführen Sie zunächst das angegebene Verhältnis der Güter 1 und 2 in eine lineare Nebenbedingung.

b) Formulieren Sie nun das vollständige nicht-lineare Optimierungsproblem.

c) Stellen Sie die zugehörige Lagrangefunktion $L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2)$ auf. Verzichten Sie in dieser Teilaufgaben auf die Nichtnegativitätsbedingung.

d) Geben Sie **alle** ersten partiellen Ableitungen der Lagrangefunktion $L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2)$ an.

e) Zeigen Sie einen Rechenweg auf, der zum Auffinden des kritischen Punktes $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 200 \\ 600 \end{pmatrix}$ der Lagrangefunktion $L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2)$ erforderlich ist.

f) Berechnen Sie die zum kritischen Punkt $\mathbf{x}^*$ zugehörigen Lagrange-Multiplikatoren λ_1 und λ_2.